Министерство образования и науки Кыргызской Республики
Кыргызский Национальный Университет им. Ж. Баласагына

**Т.Д. Омуров**

# НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА НАВЬЕ-СТОКСА ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

**Бишкек – 2010**

УДК 517.2
ББК 22.311
0 - 58

Омуров Таалайбек Дардайылович
Нестационарная задача Навье-Стокса для несжимаемой жидкости / КНУ им. Ж. Баласагына. - Бишкек, 2010.- 21 с.

ISBN 978 – 9967 – 02 – 643 – 8

Одной из проблемных математических задач современности - является уравнение Навье-Стокса (Н-С), которая описывает движение вязкой ньютоновской жидкости и является основой гидродинамики. Исследования этого уравнения представляет научный интерес не только в теоретическом, но и в практическом плане.

В настоящей работе разработан метод решения задачи (Н-С) для несжимаемой жидкости [1,2], которая дает доказательство существование гладких решений изучаемой задачи.

Библиогр. 3 назв.

Работа публикуется на двух языках:
на русском и на английском.

Основное содержание работы зарегистрировано в Кыргызпатенте: Сектор объектов авторского права, авторское свидетельство №1543 от 30.07.2010 года.

Рецензент: д-р. физ.-мат. наук, проф. У.М. Туганбаев

О – 1602070100 – 10

УДК 517.2
ББК 22.311

ISBN 978 – 9967 – 02 – 643 – 8

## Оглавление

***Все, что может служить на пользу развития человеческого мышления, - все должно быть и выслушано, и принято.***

Николай Рерих

## Предисловие

Существование и гладкость решений уравнений Навье - Стокса (Н-С) – одна из проблемных математических задач тысячелетия, сформулированных в 2000 году Математическим институтом Клэя [1].

Численные решения задачи (Н-С) используются во многих практических приложениях, но в аналитическом виде решения найдены лишь в некоторых частных случаях. До настоящего времени не получено ни одного общего решения уравнений (Н-С) и для сжимаемой и несжимаемой жидкости [2].

В настоящей работе исследуем нестационарную задачу (Н-С) для несжимаемой жидкости. Однако в физическом смысле вывод уравнений (Н-С) не входит в нашу задачу, так как имеется огромное количество фундаментальных работ, отражающие эти вопросы.

## Введение

Основной целью работы, является доказательство существования и гладкости решений нестационарной задачи (Н-С) для несжимаемой жидкости. Поэтому, не нарушая формулировку постановки задачи (Н-С) Математическим институтом Клэя [1], приводим эту постановку в полном смысле:

Пусть $\vec{\upsilon}(\vec{x},t)$– трёхмерный вектор скорости жидкости, $p(\vec{x},t)$– давление. Тогда уравнения Навье – Стокса записываются:

$$\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}+(\vec{\upsilon}\cdot\nabla)\vec{\upsilon}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\mu\Delta\vec{\upsilon}+\vec{f}(\vec{x},t), \qquad (1)$$

с условием:

$$\upsilon(\vec{x},t)\big|_{t=0}=\upsilon^{0}(\vec{x}), x\in R^{3}, t\in[0,T_0], \qquad (2)$$

где $\mu>0$ – это кинематическая вязкость, $\rho$ – плотность, $\vec{f}(\vec{x},t)$– внешняя сила, $\nabla$– оператор набла и $\Delta$– оператор Лапласа (лапласиан), который также обозначается, как $\nabla\cdot\nabla$. (1) – это векторное уравнение, то есть оно содержит три скалярных уравнений. Если обозначить компоненты вектор ов скорости и внешней силы, как

$$\vec{\upsilon}(\vec{x},t)=(\upsilon_1(\vec{x},t),\upsilon_2(\vec{x},t),\upsilon_3(\vec{x},t)), \qquad \vec{f}(\vec{x},t)=(f_1(\vec{x},t),f_2(\vec{x},t),f_3(\vec{x},t)),$$

то для каждого значения $i=1,\ 2,\ 3,$ получается соответствующее скалярное уравнение (Н-С):

$$\frac{\partial\upsilon_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3}\upsilon_j\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2\upsilon_i}{\partial x_j^2}+f_i(\vec{x},t).$$

Неизвестными величинами являются скорость $\vec{\upsilon}(\vec{x},t)$ и давление $p(\vec{x},t)$, т.е. четыре неизвестных (три компоненты скорости и давления), то необходимо ещё одно уравнение. Дополнительным уравнением является условие несжимаемости жидкости:

$$\nabla\cdot\vec{\upsilon}=0. \qquad (3)$$

В основном работа состоит из двух параграфов.

Первый – это параграф информационного характера, т.е. зде сь изучается задача (Н-С) для несжимаемой жидкости без трения [2]. В этом случае решение (Н-С) рассматривается как строгое решение этой задачи, так как члены уравнений (Н-С), зависящие от вязкости, тождественно равны нулю. Но метод решения этой задачи не применим к задачам (Н-С) для несжимаемой жидкости с трением. Следовательно, вопрос решения задачи (Н-С) для несжимаемой жидкости с трением остается открытым.

Поэтому, во втором параграфе этой работы, разработан метод для решения поставленной задачи и назван: **Методом эквивалентного раздробления системы (Н-С) – «МЭРС-(Н-С)»**.

## § 1. Информационный параграф: Течения без трения, как строгие решения задачи Навье – Стокса

Теория идеальной жидкости (жидкость без трения лобовое сопротивление равно нулю (парадокс Даламбера)) совершенно бессильно для решения проблемы вычисления сопротивления тела, движущегося в жидкости (нормальные силы: давления, касательные силы: (напряжения сдвига), т.е. силы трения действительных жидкостей, связаны с тем свойством жидкости, которое называется вязкостью [2]). Например, несжимаемые течения без трения [2] были рассмотрены как строгие решения уравнения (Н-С), так как в этом случае в уравнениях (Н-С): $\Delta u = 0, \Delta \upsilon = 0, \Delta w = 0,$ т.е. система (1) приводится к виду:

$$\begin{cases} u_t + \dfrac{1}{2}(u^2 + \upsilon^2 + w^2)_x = f_1 - \dfrac{1}{\rho}P_x, \\ \upsilon_t + \dfrac{1}{2}(u^2 + \upsilon^2 + w^2)_y = f_2 - \dfrac{1}{\rho}P_y, \\ w_t + \dfrac{1}{2}(u^2 + \upsilon^2 + w^2)_z = f_3 - \dfrac{1}{\rho}P_z, \end{cases} \tag{1.1}$$

при выполнении условия Стокса:

$$u_y = \upsilon_x, u_z = w_x, \upsilon_z = w_y \; . \tag{1.2}$$

Из системы (1.1) видно, если 1-уравнение (1.1) дифференцируем по $x$, 2-е по $y$, 3-е по $z$ и суммируем, то получим:

$$\Delta J = -F_0 \; , \tag{1.3}$$

уравнение Пуассона [3],

$F_0 \equiv -(f_{1x} + f_{2y} + f_{3z}), Q \equiv u^2 + \upsilon^2 + w^2, J \equiv \dfrac{1}{\rho}P + \dfrac{1}{2}Q$ -решение (1.3) стремящееся к нулю на бесконечности. В работе Соболева С.Л. [3] указано, что функция

$$J = \frac{1}{4\pi}\iint\int_{-\infty}^{\infty} F_0(s_1, s_2, s_3, t)\cdot\frac{ds_1 ds_2 ds_3}{r}, \tag{1.4}$$

$$r = \sqrt{(x-s_1)^2 + (y-s_2)^2 + (z-s_3)^2}, \; \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \equiv \iint\int_{-\infty}^{\infty} \; ,$$

удовлетворяет уравнению (1.3) и называется ньютоновым потенциалом. При этом доказаны:

а) стремление к нулю функции $J$ на бесконечности, где:

$$|J| \le \frac{1}{4\pi}A\iint\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{r \cdot R^{2+\alpha}} \le \frac{1}{4\pi R_0^{\alpha}} A \cdot k \; ,$$

$$\begin{cases} |F_0| < \dfrac{A}{R^{2+\alpha}}, R \geq 1, 0 < \alpha < 1, \\ |F_0| < A, R < 1, R = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}, \end{cases}$$

$$\iint\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi d\eta d\tau}{P^{2+\alpha} P_1} = k\,,\ R_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,,$$

$$s_1 = R_0\xi, s_2 = R_0\eta, s_3 = R_0\tau\ , P = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \tau^2}, P_1 = \sqrt{(\xi - 1)^2 + \eta^2 + \tau^2}\ ;$$

б) одновременно доказано существование непрерывных первых производных у ньютонова потенциала.

Для того чтобы доказать существование и непрерывность вторых разбиваем на $F_{01}$ , $F_{02}$ так, где в окрестности точки $(x, y, z)$ функция $F_{02}$ была бы тождественно равно нулю, а функция $F_{01}$ была бы тождественно равно нулю в некоторой окрестности бесконечности. Причем $F_{01}$ , $F_{02}$ в свою очередь будут иметь непрерывные производные первого порядка. Тогда

$$J = \frac{1}{4\pi}[\iint\int_{-\infty}^{\infty} F_{01}(s_1, s_2, s_3, t) \cdot \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{r} + \iint\int_{-\infty}^{\infty} F_{02}(s_1, s_2, s_3, t) \cdot \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{r}]\,. \qquad (1.5)$$

Так как $F_{02} \equiv 0$ в окрестности точки $(x, y, z)$, то из второго интеграла (1.5) исключив эту окрестность, можем дифференцировать его два раза, получая равномерно сходящиеся интегралы.

Рассмотрим первый интеграл (1.5):

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{4\pi}\iint\int_{-\infty}^{\infty} F_{01} \cdot \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{r}) = \frac{1}{4\pi}\iint\int_{-\infty}^{\infty} F_{01} \cdot \frac{(s_1 - x) ds_1 ds_2 ds_3}{r^3} \qquad (1.6)$$

и вводя новые перемены: $s_1 = x + \xi, s_2 = y + \eta, s_3 = z + \tau$ , из (1.6) получим:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{4\pi}\iint\int_{-\infty}^{\infty} F_{01} \cdot \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{r}) = \frac{1}{4\pi}\iint\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi F_{01}(x + \xi, y + \eta, z + \tau, t) d\xi d\eta d\tau}{\sqrt{(\xi^2 + \eta^2 + \tau^2)^3}}\,. \qquad (1.7)$$

Отсюда видно, что (1.7) можно дифференцировать по $x, y, z,$ причем интегралы от производных будут сходиться равномерно.

Остается доказать, что ньютонов потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона.

Возьмем функцию [3]: $\psi(x, y, z, t)$, равную нулю везде, кроме некоторого шара $C$ с центром в точке $(x, y, z)$, и имеющую непрерывные производные нескольких порядков. Тогда по формуле Грина, замечая, что вне шара $C$ функции $\psi$ и $\dfrac{\partial \psi}{\partial n}$ равны нулю, получим:

$$\psi(x, y, z, t) = -\frac{1}{4\pi}\iint\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta\psi(s_1, s_2, s_3, t)}{r} ds_1, ds_2, ds_3. \qquad (1.8)$$

Умножая обе части (1.8) на $\frac{1}{4\pi}F_0\,(x,\,y,\,z,\,t)$ и интегрируя по $x,\,y,\,z,$ будем иметь:

$$\frac{1}{4\pi}\iint\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x,y,z,t)F_0(x,y,z,t)dxdydz=-\frac{1}{(4\pi)^2}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}}_{6\,раз}\frac{\Delta\psi(s_1,s_2,s_3,t)F_0(x,y,z,t)}{r}\times$$

$$\times ds_1ds_2ds_3dxdydz=-\frac{1}{4\pi}\iint\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta\psi(s_1,s_2,s_3,t)(\frac{1}{4\pi}\iint\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F_0}{r}dxdydz)ds_1ds_2ds_3=$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\iint\int_{-\infty}^{+\infty}J(s_1,s_2,s_3,t)\Delta\psi(s_1,s_2,s_3,t)ds_1ds_2ds_3. \qquad (1.9)$$

Последний интеграл преобразуется с учетом, что при достаточно большой области $D$

$$\iiint_D J\Delta\psi(s_1,s_2,s_3,t)ds_1ds_2ds_3=\iiint_D \psi\Delta J(s_1,s_2,s_3,t)ds_1ds_2ds_3. \qquad (1.10)$$

Сопоставляя (1.10) с (1.9), приходим к заключению, что

$$\iint\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(s_1,s_2,s_3,t)[\Delta J+F_0]ds_1ds_2ds_3=0. \qquad (1.11)$$

Из произвольности $\psi(s_1,s_2,s_3,t)$ из (1.11), вытекает:

$$\Delta J=-F_0,$$

что и требовалось доказать.

Поэтому, если $J(x,\,y,\,z,\,t)$ решение уравнения (1.3), то подставляя:

$$\begin{cases}-\frac{1}{\rho}P_x=\frac{1}{2}Q_x-J_x,\\ -\frac{1}{\rho}P_y=\frac{1}{2}Q_y-J_y,\\ -\frac{1}{\rho}P_z=\frac{1}{2}Q_z-J_z,\end{cases} \qquad (1.12)$$

в (1.1), находим решение $(u,\upsilon,w)$, где

$$J_x=\frac{1}{4\pi}\iint\int_{-\infty}^{\infty}F_0(s_1,s_2,s_3,t)\cdot\frac{-(x-s_1)ds_1ds_2ds_3}{r^3},$$

$$J_y=\frac{1}{4\pi}\iint\int_{-\infty}^{\infty}F_0(s_1,s_2,s_3,t)\cdot\frac{-(y-s_2)ds_1ds_2ds_3}{r^3},$$

$$J_z=\frac{1}{4\pi}\iint\int_{-\infty}^{\infty}F_0(s_1,s_2,s_3,t)\cdot\frac{-(z-s_3)ds_1ds_2ds_3}{r^3}.$$

Но в общем случае, по этой схеме невозможно решить систему (Н-С), так как не выполняется условие (1.2) в течениях с трением [1,2]. Следовательно, необходимо найти способ интегрирования, из которого следовало бы гладкое решение системы (Н-С) в классе:

$$D^0(T)=\{(u,\upsilon,w)\in C^3(T),P\in C^2(T)\}.$$

## § 2. Задача Навье – Стокса для несжимаемой жидкости

Известно, что задача Навье-Стокса (Н-С) рассматривается для сжимаемой и несжимаемой жидкости [2]. В этом параграфе исследуется задача (Н -С) для несжимаемой жидкости [1]. До настоящего времени доказательство существование и гладкости решений уравнений (Н-С) и методы интегрирования уравнений (Н-С), позволяющие получить общее решение этой задачи, не найдены. Однако, известны некоторые частные решени я, например, для ламинарного течения в трубе или для течений в пограничном слое [2], и эти частные решения хорошо совпадают с экспериментальными результатами, что вряд ли можно сомневаться в общей применимости уравнений (Н -С). Поэтому, здесь предлагаем метод для решения задачи (Н-С) для несжимаемой жидкости, которая дает доказательство существование гладких решений уравнения (Н -С).

Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} u_t + u \cdot u_x + \upsilon u_y + w u_z = f_1(x,y,z,t) - \dfrac{1}{\rho} P_x + \mu \Delta u, \\ \upsilon_t + u\upsilon_x + \upsilon\upsilon_y + w\upsilon_z = f_2(x,y,z,t) - \dfrac{1}{\rho} P_y + \mu \Delta \upsilon, \\ w_t + u w_x + \upsilon w_y + w w_z = f_3(x,y,z,t) - \dfrac{1}{\rho} P_z + \mu \Delta w, \end{cases} \tag{2.1}$$

с условиями

$$\begin{cases} u(x,y,z,t)\big|_{t=0} = u_0(x,y,z), \\ \upsilon(x,y,z,t)\big|_{t=0} = \upsilon_0(x,y,z), \\ w(x,y,z,t)\big|_{t=0} = w_0(x,y,z), \forall (x,y,z) \in R \times R \times R = R^3, t \in [0,T_0], \end{cases} \tag{2.2}$$

$$div U = u_x + \upsilon_y + w_z = 0, \tag{2.3}$$

(2.3) – уравнения неразрывности, $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ - есть оператор Лапласа, $P(x,y,z,t)$ - давление. Неизвестными величинами являются скорость $\vec{U}$: ($u,\upsilon,w$ - три компоненты скорости) и давление $P$. Здесь $\mu > 0$ - кинематическая вязкость, $\rho$ - плотность ($\rho = const$), $\vec{F}$ - внешняя сила ($f_1, f_2, f_3$ - являются компонентами внешней силы: $f_i \in C^2(T = R^3 \times [0,T_0])$. В указанных условиях покажем, что нестационарная задача (Н -С) разрешима, причем все решения обладают свойствами гладкости.

# Метод эквивалентного раздробления систе мы (Н-С): «МЭРС - (Н-С)»

Чтобы ответить на поставленный вопрос, предлагаем следующий метод решения задачи (Н-С). С этой целью, систему (2.1) преобразуем к виду:

$$\begin{cases} u\cdot u_x + \upsilon u_y + wu_z - \frac{1}{2}Q_x = f_1 - u_t - \frac{1}{\rho}P_x - \frac{1}{2}Q_x + \mu\Delta u, \\ u\upsilon_x + \upsilon\upsilon_y + w\upsilon_z - \frac{1}{2}Q_y = f_2 - \upsilon_t - \frac{1}{\rho}P_y - \frac{1}{2}Q_y + \mu\Delta\upsilon, \\ uw_x + \upsilon w_y + ww_z - \frac{1}{2}Q_z = f_3 - w_t - \frac{1}{\rho}P_z - \frac{1}{2}Q_z + \mu\Delta w, \end{cases} \qquad (2.1^1)$$

где

$$\begin{cases} Q_x = (u^2 + \upsilon^2 + w^2)_x = 2(u\cdot u_x + \upsilon\upsilon_x + ww_x), \\ Q_y = 2(u\cdot u_y + \upsilon\upsilon_y + ww_y), \\ Q_z = 2(u\cdot u_z + \upsilon\upsilon_z + ww_z). \end{cases} \qquad (2.4)$$

Из системы ($2.1^1$) видно, что в систему (2.1) справа и слева ввели функции: $-\frac{1}{2}Q_x, -\frac{1}{2}Q_y, -\frac{1}{2}Q_z$, не нарушая эквивалентности системы (2.1) и ($2.1^1$). На основе функции $\theta_i, (i = \overline{1,3})$ с учетом правой части системы ($2.1^1$) преобразуем ее к виду:

$$\begin{cases} L_1[u,\upsilon,w] \equiv f_1 - u_t - \frac{1}{\rho}P_x - \frac{1}{2}Q_x + \mu\Delta u = \theta_1, \\ L_2[u,\upsilon,w] \equiv f_2 - \upsilon_t - \frac{1}{\rho}P_y - \frac{1}{2}Q_y + \mu\Delta\upsilon = \theta_2, \\ L_3[u,\upsilon,w] \equiv f_3 - w_t - \frac{1}{\rho}P_z - \frac{1}{2}Q_z + \mu\Delta w = \theta_3, \end{cases} \qquad (2.5)$$

$$\begin{cases} \theta_1 = u\cdot u_x + \upsilon u_y + wu_z - \frac{1}{2}Q_x, \\ \theta_2 = u\upsilon_x + \upsilon\upsilon_y + w\upsilon_z - \frac{1}{2}Q_y, \\ \theta_3 = uw_x + \upsilon w_y + ww_z - \frac{1}{2}Q_z, \end{cases} \qquad (2.6)$$

$L_i, (i = \overline{1,3})$ называем «исправленными» дифференциальными операторами типа теплопроводности. Полученные системы (2.5), (2.6) содержат неизвестных: $u,\upsilon,w,\theta_i$ и давление, при этом ($2.1^1$) и (2.5), (2.6) эквивалентны.

Рассмотрим, каким образом порождается урав нение относительно давления при условии (2.3). Для этого предлагаем следующие схемы решения системы (2.5), (2.6).

**П.1.Схема 1.** Пусть введенные функции $\theta_i,(i=\overline{1,3})$ допускают условие Стокса:

$$\theta_{1y}=\theta_{2x},\theta_{2z}=\theta_{3y},\theta_{3x}=\theta_{1z} \qquad (2.7)$$

и

$$\theta_{1x}+\theta_{2y}+\theta_{3z}=0; \qquad (2.8)$$

но это не означает, что условие (2.7) и выполняется относительно: $u,\upsilon,w,$ так как исходная задача (Н-С) для течения с трением [2]. А по схеме 2 рассмотрим, когда (2.7) невыполняется. Далее, покажем случай, когда $\theta_i,(i=\overline{1,3})$ - произвольные функции.

Отметим, что выбор этих схем зависит от того, в ыполняются ли, вышеуказанные условия относительно функции $\theta_i^0,(i=\overline{1,3}),\theta_i\big|_{t=0}=\theta_i^0$ - известные функции, которые определяются в виде:

$$\begin{cases}\theta_1^0=u_0\cdot u_{0x}+\upsilon_0 u_{0y}+w_0 u_{0z}-\frac{1}{2}Q_{0x},\\ \theta_2^0=u_0\upsilon_{0x}+\upsilon_0\upsilon_{0y}+w_0\upsilon_{0z}-\frac{1}{2}Q_{0y},\\ \theta_3^0=u_0 w_{0x}+\upsilon_0 w_{0y}+w_0 w_{0z}-\frac{1}{2}Q_{0z},Q_0\equiv u_0^2+\upsilon_0^2+w_0^2.\end{cases}$$

При этом, например, как необходимые условия введения схемы 1, должны выполнятся условия:

$$\begin{cases}\theta_{1y}^0=\theta_{2x}^0,\theta_{2z}^0=\theta_{3y}^0,\theta_{3x}^0=\theta_{1z}^0,\\ \theta_{1x}^0+\theta_{2y}^0+\theta_{3z}^0=0.\end{cases}$$

Тогда при выполнении (2.7), (2.8) функции $\theta_i,(i=\overline{1,3})$ удовлетворяют уравнению Лапласа [3]:

$$\Delta\theta_i=0\ ,(i=\overline{1,3}) \qquad (2.9)$$

и единственным образом определяются, как решение этих уравнений (являются гармоническими функциями): $\theta_i=\phi_i,(i=\overline{1,3})$.

Следовательно, из системы (2.5) дифференцируя 1 уравнение по $x$, 2-е по $y$, 3-е по $z$ и суммируя с учетом (2.3) и (2.8), получим:

$$\Delta J=-F_0, \qquad (2.10)$$

где:

$$F_0\equiv-(f_{1x}+f_{2y}+f_{3z}),\ Q\equiv u^2+\upsilon^2+w^2,\ J\equiv\frac{1}{\rho}P+\frac{1}{2}Q, \qquad (2.11)$$

(2.10)- уравнение Пуассона (см.(1.3)). Решение этого уравнения представляется в виде (1.4). Из (1.4) видно, что $J\in C^2(T)$, причем:

$$\begin{cases} J_x = \dfrac{1}{\rho} P_x + \dfrac{1}{2} Q_x, \\ J_y = \dfrac{1}{\rho} P_y + \dfrac{1}{2} Q_y, \\ J_z = \dfrac{1}{\rho} P_z + \dfrac{1}{2} Q_z. \end{cases} \tag{2.12}$$

Тогда из системы (2.5), имеем:

$$\begin{cases} u_t = f_1 + \mu\Delta u - J_x - \phi_1, \\ \upsilon_t = f_2 + \mu\Delta\upsilon - J_y - \phi_2, \\ w_t = f_3 + \mu\Delta w - J_z - \phi_3. \end{cases} \tag{2.13}$$

Система (2.13) решается методом Соболева С.Л. (1966г. [3]):

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{8(\sqrt{\pi\mu t}\,)^3} \displaystyle\iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\dfrac{r^2}{4\mu t}) u_0(s_1,s_2,s_3) ds_1 ds_2 ds_3 + \\ + \displaystyle\int_0^t \cdot \iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\dfrac{r^2}{4\mu(t-\tau)}) \dfrac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-\tau)}\,)^3} [\, f_1(s_1,s_2,s_3,\tau) + \\ + \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\iint\int_{-\infty}^{\infty} F_0(s_1',s_2',s_3',\tau) \dfrac{(s_1 - s_1') ds_1' ds_2' ds_3'}{(\sqrt{(s_1-s_1')^2 + (s_2-s_2')^2 + (s_3-s_3')^2}\,)^3} - \\ - \phi_1(s_1,s_2,s_3,\tau) ] ds_1 ds_2 ds_3 d\tau \equiv H_1(x,y,z,t), \\ \upsilon = \dfrac{1}{8(\sqrt{\pi\mu t}\,)^3} \displaystyle\iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\dfrac{r^2}{4\mu t}) \upsilon_0(s_1,s_2,s_3) ds_1 ds_2 ds_3 + \\ + \displaystyle\int_0^t \cdot \iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\dfrac{r^2}{4\mu(t-\tau)}) \dfrac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-\tau)}\,)^3} [\, f_2(s_1,s_2,s_3,\tau) + \\ + \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\iint\int_{-\infty}^{\infty} F_0(s_1',s_2',s_3',\tau) \dfrac{(s_2 - s_2') ds_1' ds_2' ds_3'}{(\sqrt{(s_1-s_1')^2 + (s_2-s_2')^2 + (s_3-s_3')^2}\,)^3} - \\ - \phi_2(s_1,s_2,s_3,\tau) ] ds_1 ds_2 ds_3 d\tau \equiv H_2(x,y,z,t), \\ w = \dfrac{1}{8(\sqrt{\pi\mu t}\,)^3} \displaystyle\iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\dfrac{r^2}{4\mu t}) w_0(s_1,s_2,s_3) ds_1 ds_2 ds_3 + \\ + \displaystyle\int_0^t \cdot \iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\dfrac{r^2}{4\mu(t-\tau)}) \dfrac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-\tau)}\,)^3} [\, f_3(s_1,s_2,s_3,\tau) + \\ + \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\iint\int_{-\infty}^{\infty} F_0(s_1',s_2',s_3',\tau) \dfrac{(s_3 - s_3') ds_1' ds_2' ds_3'}{(\sqrt{(s_1-s_1')^2 + (s_2-s_2')^2 + (s_3-s_3')^2}\,)^3} - \\ - \phi_3(s_1,s_2,s_3,\tau) ] ds_1 ds_2 ds_3 d\tau \equiv H_3(x,y,z,t); \end{cases} \tag{2.14}$$

$$r^2 = (x - s_1)^2 + (y - s_2)^2 + (z - s_3)^2.$$

Все функции правой части системы (2.14) известные функции. Следовательно, $H_i,(i=\overline{1,3})$ являются точными значениями гладких функций ( $u,\upsilon,w$), соответственно. Далее, учитывая (2.14), определяем: $u_x,u_y,u_z,\upsilon_x,\upsilon_y,\upsilon_z$, $w_x,w_y,w_z$. Тогда система (2.6), с учетом функций:
$\theta_i,(i=\overline{1,3})u,\upsilon,w,\ \ u_x,u_y,u_z,\upsilon_x,\upsilon_y,\upsilon_z,w_x,w_y,w_z$, обращается в тождество.

В самом деле, так как в вышеуказанных условиях, на основе (2.6) и (2.14) и их в частных производных:

$$
\begin{aligned}
u_y &= \frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu t})^3}\iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{r^2}{4\mu t})(-\frac{y-s_2}{2\mu t})u_0(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3 + \\
&+\int_0^t\cdot\iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{r^2}{4\mu(t-\tau)})(-\frac{y-s_2}{2\mu(t-\tau)})\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-\tau)})^3}\times \\
&\times[\frac{1}{4\pi}\iint\int_{-\infty}^{\infty}F_0(s_1',s_2',s_3',\tau)\frac{(s_1-s_1')ds_1'ds_2'ds_3'}{(\sqrt{(s_1-s_1')^2+(s_2-s_2')^2+(s_3-s_3')^2})^3}+ \\
&+f_1(s_1,s_2,s_3,\tau)-\phi_1(s_1,s_2,s_3,\tau)]ds_1ds_2ds_3d\tau \equiv H_{1y},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_z &= \frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu t})^3}\iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{r^2}{4\mu t})(-\frac{z-s_3}{2\mu t})u_0(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3 + \\
&+\int_0^t\cdot\iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{r^2}{4\mu(t-\tau)})(-\frac{z-s_3}{2\mu(t-\tau)})\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-\tau)})^3}\times \\
&\times[\frac{1}{4\pi}\iint\int_{-\infty}^{\infty}F_0(s_1',s_2',s_3',\tau)\frac{(s_1-s_1')ds_1'ds_2'ds_3'}{(\sqrt{(s_1-s_1')^2+(s_2-s_2')^2+(s_3-s_3')^2})^3}+ \\
&+f_1(s_1,s_2,s_3,\tau)-\phi_1(s_1,s_2,s_3,\tau)]ds_1ds_2ds_3d\tau \equiv H_{1z},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\upsilon_x &= \frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu t})^3}\iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{r^2}{4\mu t})(-\frac{x-s_1}{2\mu t})\upsilon_0(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3 + \\
&+\int_0^t\cdot\iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{r^2}{4\mu(t-\tau)})(-\frac{x-s_1}{2\mu(t-\tau)})\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-\tau)})^3}[f_2(s_1,s_2,s_3,\tau)+ \\
&+\frac{1}{4\pi}\iint\int_{-\infty}^{\infty}F_0(s_1',s_2',s_3',\tau)\frac{(s_2-s_2')ds_1'ds_2'ds_3'}{(\sqrt{(s_1-s_1')^2+(s_2-s_2')^2+(s_3-s_3')^2})^3}- \\
&-\phi_2(s_1,s_2,s_3,\tau)]ds_1ds_2ds_3d\tau \equiv H_{2x},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\upsilon_z &= \frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu t})^3}\iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{r^2}{4\mu t})(-\frac{z-s_3}{2\mu t})\upsilon_0(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3 + \\
&+\int_0^t\cdot\iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{r^2}{4\mu(t-\tau)})(-\frac{z-s_3}{2\mu(t-\tau)})\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-\tau)})^3}[f_2(s_1,s_2,s_3,\tau)+
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint\int_{-\infty}^{\infty}F_0(s_1',s_2',s_3',\tau)\frac{(s_2-s_2')ds_1'ds_2'ds_3'}{(\sqrt{(s_1-s_1')^2+(s_2-s_2')^2+(s_3-s_3')^2})^3}-$$

$$-\phi_2(s_1,s_2,s_3,\tau)]ds_1ds_2ds_3d\tau\equiv H_{2z},$$

$$w_x=\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu t})^3}\iint\int_{-\infty}^{\infty}exp(-\frac{r^2}{4\mu t})(-\frac{x-s_1}{2\mu t})w_0(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3+$$

$$+\int_0^t\cdot\iint\int_{-\infty}^{\infty}exp(-\frac{r^2}{4\mu(t-\tau)})(-\frac{x-s_1}{2\mu(t-\tau)})\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-\tau)})^3}[f_3(s_1,s_2,s_3,\tau)+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint\int_{-\infty}^{\infty}F_0(s_1',s_2',s_3',\tau)\frac{(s_3-s_3')ds_1'ds_2'ds_3'}{(\sqrt{(s_1-s_1')^2+(s_2-s_2')^2+(s_3-s_3')^2})^3}-$$

$$-\phi_3(s_1,s_2,s_3,\tau)]ds_1ds_2ds_3d\tau\equiv H_{3x},$$

$$w_y=\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu t})^3}\iint\int_{-\infty}^{\infty}exp(-\frac{r^2}{4\mu t})(-\frac{y-s_2}{2\mu t})w_0(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3+$$

$$+\int_0^t\cdot\iint\int_{-\infty}^{\infty}exp(-\frac{r^2}{4\mu(t-\tau)})(-\frac{y-s_2}{2\mu(t-\tau)})\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-\tau)})^3}[f_3(s_1,s_2,s_3,\tau)+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint\int_{-\infty}^{\infty}F_0(s_1',s_2',s_3',\tau)\frac{(s_3-s_3')ds_1'ds_2'ds_3'}{(\sqrt{(s_1-s_1')^2+(s_2-s_2')^2+(s_3-s_3')^2})^3}-$$

$$-\phi_3(s_1,s_2,s_3,\tau)]ds_1ds_2ds_3d\tau\equiv H_{3y},$$

получим:

$$\begin{cases}\theta_1=H_2\cdot H_{1y}+H_3\cdot H_{1z}-H_2\cdot H_{2x}-H_3\cdot H_{3x}\equiv\phi_1(x,y,z,t),\\ \theta_2=H_1\cdot H_{2x}+H_3\cdot H_{2z}-H_1\cdot H_{1y}-H_3\cdot H_{3y}\equiv\phi_2(x,y,z,t),\\ \theta_3=H_1\cdot H_{3x}+H_2\cdot H_{3y}-H_1\cdot H_{1z}-H_2\cdot H_{2z}\equiv\phi_3(x,y,z,t).\end{cases}\qquad(2.15)$$

Из полученных результатов схемы 1 следует, что функции: $\theta_i\in C^2(T),i=\overline{1,3},$ $u,\upsilon,w\in C^3(T)$ определяются из системы (2.9), (2.14). Поэтому, учитывая (1.4), (2.11), получим:

$$\frac{1}{\rho}P=-\frac{1}{2}(u^2+\upsilon^2+w^2)+\frac{1}{4\pi}\iint\int_{-\infty}^{\infty}F_0(s_1,s_2,s_3,t)\cdot\frac{ds_1ds_2ds_3}{r}.\qquad(2.16)$$

Отсюда видно, что $P\in C^2(T)$, (2.16)- это уравнение типа Бернулли.

**Теорема 2.1.** При условиях (2.2), (2.3), (2.7), (2.8) нестационарная задача (Н - С) разрешима в $D^0(T)$.

**П.2. Схема 2.** Пусть требования (2.7) не выполняется, т.е. функции $\theta_i,(i=\overline{1,3})$ допускают только условие (2.8): $\theta_{1x}+\theta_{2y}+\theta_{3z}=0$.

Тогда из (2.5) учитывая идею решения схемы 1, имеем (2.10), (2.11), т.е.:

$$\Delta J=-F_0,$$

$$F_0 \equiv -(f_{1x} + f_{2y} + f_{3z}),\ Q \equiv u^2 + \upsilon^2 + w^2,\ J \equiv \frac{1}{\rho} P + \frac{1}{2} Q \ ,$$

и решение представляется в виде (1.4). Тогда на основе (2.12) из (2.5), имеем:

$$\begin{cases} u_t = f_1 + \mu\Delta u - J_x - \theta_1, \\ \upsilon_t = f_2 + \mu\Delta \upsilon - J_y - \theta_2, \\ w_t = f_3 + \mu\Delta w - J_z - \theta_3. \end{cases} \tag{2.17}$$

Поэтому, используя идею решения системы (2.13) из (2.17) и (2.6), находим:

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{8(\sqrt{\pi\mu t})^3} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} exp(-\dfrac{r^2}{4\mu t}) u_0(s_1,s_2,s_3) ds_1 ds_2 ds_3 + \int\limits_0^t \cdot \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} exp(-\dfrac{r^2}{4\mu(t-\tau)}) \times \\ \times \dfrac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-\tau)})^3} [\dfrac{1}{4\pi} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{F_0(s_1',s_2',s_3',\tau)(s_1 - s_1') ds_1' ds_2' ds_3'}{(\sqrt{(s_1-s_1')^2 + (s_2-s_2')^2 + (s_3-s_3')^2})^3} + \\ + f_1 - \theta_1(s_1,s_2,s_3,\tau)] ds_1 ds_2 ds_3 d\tau \equiv (B_1\theta_1)(x,y,z,t), \\ \upsilon = \dfrac{1}{8(\sqrt{\pi\mu t})^3} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} exp(-\dfrac{r^2}{4\mu t}) \upsilon_0(s_1,s_2,s_3) ds_1 ds_2 ds_3 + \int\limits_0^t \cdot \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} exp(-\dfrac{r^2}{4\mu(t-\tau)}) \times \\ \times \dfrac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-\tau)})^3} [\dfrac{1}{4\pi} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{F_0(s_1',s_2',s_3',\tau)(s_2 - s_2') ds_1' ds_2' ds_3'}{(\sqrt{(s_1-s_1')^2 + (s_2-s_2')^2 + (s_3-s_3')^2})^3} + \\ + f_2 - \theta_2(s_1,s_2,s_3,\tau)] ds_1 ds_2 ds_3 d\tau \equiv (B_2\theta_2)(x,y,z,t), \\ w = \dfrac{1}{8(\sqrt{\pi\mu t})^3} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} exp(-\dfrac{r^2}{4\mu t}) w_0(s_1,s_2,s_3) ds_1 ds_2 ds_3 + \\ + \int\limits_0^t \cdot \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} exp(-\dfrac{r^2}{4\mu(t-\tau)}) \dfrac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-\tau)})^3} [f_3(s_1,s_2,s_3,\tau) - \theta_3(s_1,s_2,s_3,\tau) + \\ + \dfrac{1}{4\pi} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{F_0(s_1',s_2',s_3',\tau)(s_3 - s_3') ds_1' ds_2' ds_3'}{(\sqrt{(s_1-s_1')^2 + (s_2-s_2')^2 + (s_3-s_3')^2})^3}] ds_1 ds_2 ds_3 d\tau \equiv \\ \equiv (B_3\theta_3)(x,y,z,t); \end{cases} \tag{2.18}$$

$$\begin{cases} \theta_1 = (B_2\theta_2)(B_1\theta_1)_y + (B_3\theta_3)(B_1\theta_1)_z - (B_2\theta_2)(B_2\theta_2)_x - (B_3\theta_3)(B_3\theta_3)_x \equiv \\ \equiv D_1[\theta_1,\theta_2,\theta_3], \\ \theta_2 = (B_1\theta_1)(B_2\theta_2)_x + (B_3\theta_3)(B_2\theta_2)_z - (B_1\theta_1)(B_1\theta_1)_y - (B_3\theta_3)(B_3\theta_3)_y \equiv \\ \equiv D_2[\theta_1,\theta_2,\theta_3], \\ \theta_3 = (B_1\theta_1)(B_3\theta_3)_x + (B_2\theta_2)(B_3\theta_3)_y - (B_1\theta_1)(B_1\theta_1)_z - (B_2\theta_2)(B_2\theta_2)_z \equiv \\ \equiv D_3[\theta_1,\theta_2,\theta_3]. \end{cases} \tag{2.19}$$

Здесь $(B_1\theta_1)_y, (B_1\theta_1)_z, (B_2\theta_2)_x, (B_2\theta_2)_z, (B_3\theta_3)_x, (B_3\theta_3)_y$ определяются из системы (2.18), соответственно с дифференцированием по $x$, $y$, $z$, т.е.:

$$u_y = \frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu t})^3}\iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{r^2}{4\mu t})(-\frac{y-s_2}{2\mu t})u_0(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3 +$$

$$+\int_0^t \cdot \iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{r^2}{4\mu(t-\tau)})(-\frac{y-s_2}{2\mu(t-\tau)})\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-\tau)})^3}[f_1 - \theta_1(s_1,s_2,s_3,\tau)+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F_0(s_1',s_2',s_3',\tau)(s_1-s_1')ds_1'ds_2'ds_3'}{(\sqrt{(s_1-s_1')^2+(s_2-s_2')^2+(s_3-s_3')^2})^3}]ds_1ds_2ds_3d\tau \equiv (B_1\theta_1)_y,$$

$$u_z = \frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu t})^3}\iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{r^2}{4\mu t})(-\frac{z-s_3}{2\mu t})u_0(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3 +$$

$$+\int_0^t \cdot \iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{r^2}{4\mu(t-\tau)})(-\frac{z-s_3}{2\mu(t-\tau)})\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-\tau)})^3}[f_1 - \theta_1(s_1,s_2,s_3,\tau)+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F_0(s_1',s_2',s_3',\tau)(s_1-s_1')ds_1'ds_2'ds_3'}{(\sqrt{(s_1-s_1')^2+(s_2-s_2')^2+(s_3-s_3')^2})^3}]ds_1ds_2ds_3d\tau \equiv (B_1\theta_1)_z,$$

$$\upsilon_x = \frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu t})^3}\iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{r^2}{4\mu t})(-\frac{x-s_1}{2\mu t})\upsilon_0(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3 +$$

$$+\int_0^t \cdot \iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{r^2}{4\mu(t-\tau)})(-\frac{x-s_1}{2\mu(t-\tau)})\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-\tau)})^3}[f_2 - \theta_2(s_1,s_2,s_3,\tau)+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F_0(s_1',s_2',s_3',\tau)(s_2-s_2')ds_1'ds_2'ds_3'}{(\sqrt{(s_1-s_1')^2+(s_2-s_2')^2+(s_3-s_3')^2})^3}]ds_1ds_2ds_3d\tau \equiv (B_2\theta_2)_x,$$

$$\upsilon_z = \frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu t})^3}\iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{r^2}{4\mu t})(-\frac{z-s_3}{2\mu t})\upsilon_0(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3 +$$

$$+\int_0^t \cdot \iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{r^2}{4\mu(t-\tau)})(-\frac{z-s_3}{2\mu(t-\tau)})\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-\tau)})^3}[f_2 - \theta_2(s_1,s_2,s_3,\tau)+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F_0(s_1',s_2',s_3',\tau)(s_2-s_2')ds_1'ds_2'ds_3'}{(\sqrt{(s_1-s_1')^2+(s_2-s_2')^2+(s_3-s_3')^2})^3}]ds_1ds_2ds_3d\tau \equiv (B_2\theta_2)_z,$$

$$w_x = \frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu t})^3}\iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{r^2}{4\mu t})(-\frac{x-s_1}{2\mu t})w_0(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3 +$$

$$+\int_0^t \cdot \iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{r^2}{4\mu(t-\tau)})(-\frac{x-s_1}{2\mu(t-\tau)})\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-\tau)})^3}[f_3(s_1,s_2,s_3,\tau)-$$

$$-\theta_3(s_1,s_2,s_3,\tau)+\frac{1}{4\pi}\iint\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F_0(s_1',s_2',s_3',\tau)(s_3-s_3')ds_1'ds_2'ds_3'}{(\sqrt{(s_1-s_1')^2+(s_2-s_2')^2+(s_3-s_3')^2})^3}]\times$$

$$\times ds_1ds_2ds_3d\tau \equiv (B_3\theta_3)_x,$$

$$w_y=\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu t})^3}\iint\int_{-\infty}^{\infty}exp(-\frac{r^2}{4\mu t})(-\frac{y-s_2}{2\mu t})w_0(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3+$$

$$+\int_0^t\cdot\iint\int_{-\infty}^{\infty}exp(-\frac{r^2}{4\mu(t-\tau)})(-\frac{y-s_2}{2\mu(t-\tau)})\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-\tau)})^3}[f_3(s_1,s_2,s_3,\tau)-$$

$$-\theta_3(s_1,s_2,s_3,\tau)+\frac{1}{4\pi}\iint\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F_0(s_1',s_2',s_3',\tau)(s_3-s_3')ds_1'ds_2'ds_3'}{(\sqrt{(s_1-s_1')^2+(s_2-s_2')^2+(s_3-s_3')^2})^3}]\times$$

$$\times ds_1ds_2ds_3d\tau\equiv(B_3\theta_3)_y.$$

**Лемма 2.1.** Если операторы: $D_i$ сжимающие с коэффициентами сжатия $d_i$, причем: $\sum_{i=1}^{3}d_i=d<1,$ то система (2.19) разрешима в $C^1(T)$. Тогда решение этой системы, можно найти на основе метода Пикара:

$$\begin{cases}\theta_1^{n+1}=D_1[\theta_1^n,\theta_2^n,\theta_3^n],\\ \theta_2^{n+1}=D_2[\theta_1^n,\theta_2^n,\theta_3^n],\\ \theta_3^{n+1}=D_3[\theta_1^n,\theta_2^n,\theta_3^n],\end{cases}\qquad(2.20)$$

$n=0,1,...$, где $\theta_1^0,\theta_2^0,\theta_3^0$ - начальные приближения.

**Лемма 2.2.** При условиях леммы 2.1 существуют единственные функции, $u,\upsilon,w\in C^3(T),$ которые определяются из системы (2.18).

На основе вышесказанных лемм и (2.10), (2.11), (1.4), находим давление:

$$\frac{1}{\rho}P=-\frac{1}{2}(u^2+\upsilon^2+w^2)+\frac{1}{4\pi}\iint\int_{-\infty}^{\infty}F_0(s_1,s_2,s_3,t)\cdot\frac{ds_1ds_2ds_3}{r}.\qquad(2.21)$$

**Теорема 2.2.** Если выполняются условия (2.2), (2.3), леммы 2.2 и (2.21), то задача (Н-С) имеет не более одного решения в $D^0(T)$.

**Замечание 2.1.** Пусть функции $\theta_i,(i=\overline{1,3})$ удовлетворяют условию (2.7). Тогда можем требовать:

$$\theta_1=\theta_x,\theta_2=\theta_y,\theta_3=\theta_z,\qquad(2.22)$$

т.е. $\theta$ - новая неизвестная функция. Поэтому (2.5) переходит к виду:

$$\begin{cases}L_1[u,\upsilon,w]\equiv f_1-u_t-\frac{1}{\rho}P_x-\frac{1}{2}Q_x+\mu\Delta u=\theta_x,\\ L_2[u,\upsilon,w]\equiv f_2-\upsilon_t-\frac{1}{\rho}P_y-\frac{1}{2}Q_y+\mu\Delta\upsilon=\theta_y,\\ L_3[u,\upsilon,w]\equiv f_3-w_t-\frac{1}{\rho}P_z-\frac{1}{2}Q_z+\mu\Delta w=\theta_z,\end{cases}\qquad(2.23)$$

и первое уравнение (2.23) дифференцируя по $x$, 2-е по $y$, 3-е по $z$ и суммируя с учетом (2.3), получим:

$$\Delta J=-F_0,\qquad(2.24)$$

где $F_0 \equiv -( f_{1x} + f_{2y} + f_{3z} ), Q \equiv u^2 + \upsilon^2 + w^2, J \equiv \frac{1}{\rho}P + \frac{1}{2}Q + \theta$. (2.25)

Решение этого уравнения представляется в виде (1.4), с учетом (2.25). Следовательно, на основе:

$$\begin{cases} J_x \equiv \frac{1}{\rho}P_x + \frac{1}{2}Q_x + \theta_x, \\ J_y \equiv \frac{1}{\rho}P_y + \frac{1}{2}Q_y + \theta_y, \\ J_z \equiv \frac{1}{\rho}P_z + \frac{1}{2}Q_z + \theta_z \end{cases} \tag{2.26}$$

из (2.5), получим

$$\begin{cases} u_t = f_1 + \mu\Delta u - J_x, \\ \upsilon_t = f_2 + \mu\Delta\upsilon - J_y, \\ w_t = f_3 + \mu\Delta w - J_z, \end{cases} \tag{2.27}$$

$$\begin{cases} J_x = \frac{1}{4\pi}\iint\int_{-\infty}^{\infty} F_0(s'_1,s'_2,s'_3,t)\frac{-(x-s'_1)ds'_1ds'_2ds'_3}{(\sqrt{(x-s'_1)^2+(y-s'_2)^2+(z-s'_3)^2}\,)^3}, \\ J_y = \frac{1}{4\pi}\iint\int_{-\infty}^{\infty} F_0(s'_1,s'_2,s'_3,t)\frac{-(y-s'_1)ds'_1ds'_2ds'_3}{(\sqrt{(x-s'_1)^2+(y-s'_2)^2+(z-s'_3)^2}\,)^3}, \\ J_z = \frac{1}{4\pi}\iint\int_{-\infty}^{\infty} F_0(s'_1,s'_2,s'_3,t)\frac{-(z-s'_1)ds'_1ds'_2ds'_3}{(\sqrt{(x-s'_1)^2+(y-s'_2)^2+(z-s'_3)^2}\,)^3}. \end{cases}$$

Решая систему (2.27) методом Соболева:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu t}\,)^3}\iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{r^2}{4\mu t})u_0(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3 + \int_0^t \cdot \iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{r^2}{4\mu(t-\tau)})\times \\ \times\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-\tau)}\,))^3}[f_1(s_1,s_2,s_3,\tau)-J_x(s_1,s_2,s_3,\tau)]ds_1ds_2ds_3d\tau \equiv H_1(x,y,z,t), \\ \upsilon = \frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu t}\,)^3}\iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{r^2}{4\mu t})\upsilon_0(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3 + \int_0^t \cdot \iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{r^2}{4\mu(t-\tau)})\times \\ \times\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-\tau)}\,))^3}[f_2(s_1,s_2,s_3,\tau)-J_y(s_1,s_2,s_3,\tau)]ds_1ds_2ds_3d\tau \equiv H_2(x,y,z,t), \\ w = \frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu t}\,)^3}\iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{r^2}{4\mu t})w_0(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3 + \int_0^t \cdot \iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{r^2}{4\mu(t-\tau)})\times \\ \times\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-\tau)}\,))^3}[f_3(s_1,s_2,s_3,\tau)-J_z(s_1,s_2,s_3,\tau)]ds_1ds_2ds_3d\tau \equiv \\ \equiv H_3(x,y,z,t). \end{cases} \tag{2.28}$$

Все $H_i, (i=\overline{1,3})$ - известные функции и $u_x, u_y, u_z, \upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z, w_x, w_y, w_z$ определяются из (2.28):

$$u_y = \frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu t})^3}\iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{r^2}{4\mu t})(-\frac{y-s_2}{2\mu t})u_0(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3 +$$
$$+\int_0^t\cdot\iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{r^2}{4\mu(t-\tau)})(-\frac{y-s_2}{2\mu(t-\tau)})\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-\tau)})^3}[f_1 - J_x(s_1,s_2,s_3,\tau)]\times$$
$$\times ds_1ds_2ds_3d\tau \equiv H_{1y},$$

$$u_z = \frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu t})^3}\iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{r^2}{4\mu t})(-\frac{z-s_3}{2\mu t})u_0(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3 +$$
$$+\int_0^t\cdot\iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{r^2}{4\mu(t-\tau)})(-\frac{z-s_3}{2\mu(t-\tau)})\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-\tau)})^3}[f_1 - J_x(s_1,s_2,s_3,\tau)]\times$$
$$\times ds_1ds_2ds_3d\tau \equiv H_{1z},$$

$$\upsilon_x = \frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu t})^3}\iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{r^2}{4\mu t})(-\frac{x-s_1}{2\mu t})\upsilon_0(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3 +$$
$$+\int_0^t\cdot\iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{r^2}{4\mu(t-\tau)})(-\frac{x-s_1}{2\mu(t-\tau)})\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-\tau)})^3}[f_2 - J_y(s_1,s_2,s_3,\tau)]\times$$
$$\times ds_1ds_2ds_3d\tau \equiv H_{2x},$$

$$\upsilon_z = \frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu t})^3}\iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{r^2}{4\mu t})(-\frac{z-s_3}{2\mu t})\upsilon_0(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3 +$$
$$+\int_0^t\cdot\iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{r^2}{4\mu(t-\tau)})(-\frac{z-s_3}{2\mu(t-\tau)})\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-\tau)})^3}[f_2 - J_y(s_1,s_2,s_3,\tau)]\times$$
$$\times ds_1ds_2ds_3d\tau \equiv H_{2z},$$

$$w_x = \frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu t})^3}\iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{r^2}{4\mu t})(-\frac{x-s_1}{2\mu t})w_0(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3 +$$
$$+\int_0^t\cdot\iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{r^2}{4\mu(t-\tau)})(-\frac{x-s_1}{2\mu(t-\tau)})\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-\tau)})^3}[f_3 - J_z(s_1,s_2,s_3,\tau)]\times$$
$$\times ds_1ds_2ds_3d\tau \equiv H_{3x},$$

$$w_y = \frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu t})^3}\iint\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{r^2}{4\mu t})(-\frac{y-s_2}{2\mu t})w_0(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3 +$$

$$+\int_0^t \cdot \iint_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{r^2}{4\mu(t-\tau)})(-\frac{y-s_2}{2\mu(t-\tau)})\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-\tau)})^3}[f_3(s_1,s_2,s_3,\tau)-$$
$$-J_z(s_1,s_2,s_3,\tau)]ds_1ds_2ds_3d\tau \equiv H_{3y},$$

где $u,\upsilon,w \in C^3(T)$. Поэтому, на основе (2.6), (2.22) и (2.28) и их в частных производных по *x*, *y*, *z*, находим:

$$\begin{cases} \theta_x = H_2 \cdot H_{1y} + H_3 \cdot H_{1z} - H_2 \cdot H_{2x} - H_3 \cdot H_{3x} \equiv \psi_1(x,y,z,t), \\ \theta_y = H_1 \cdot H_{2x} + H_3 \cdot H_{2z} - H_1 \cdot H_{1y} - H_3 \cdot H_{3y} \equiv \psi_2(x,y,z,t), \\ \theta_z = H_1 \cdot H_{3x} + H_2 \cdot H_{3y} - H_1 \cdot H_{1z} - H_2 \cdot H_{2z} \equiv \psi_3(x,y,z,t). \end{cases} \qquad (2.29)$$

Правая сторона системы (2.29) также известны, так как они определяются с учетом функций $H_i,(i=\overline{1,3})$. Отсюда следует, что и $\psi_i(x,y,z,t),(i=\overline{1,3})$, известны. Для определения $\theta(x,y,z,t)$ можем интегрировать (2.29) по *x, y, z* и получить: $\theta = \frac{1}{3}(\int_{-\infty}^{x}\psi_1 ds + \int_{-\infty}^{y}\psi_2 d\tau + \int_{-\infty}^{z}\psi_3 d\eta)$. Но можем поступить и по другому, т.е. (2.29) дифференцируя по *x,* по *y,* по *z* и суммируя, имеем:

$$\Delta\theta = -\psi^0, \qquad (2.30)$$

где $\psi^0 \equiv -(\psi_{1x} + \psi_{2y} + \psi_{3z})$, (2.30)- это уравнение Пуассона [3] и она однозначно разрешимо $C^2(T)$ (см.(1.4)). Поэтому, учитывая (1.4), (2.25), (2.28), (2.30), получим:

$$\frac{1}{\rho}P = -\theta - \frac{1}{2}(u^2 + \upsilon^2 + w^2) + \frac{1}{4\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} F_0(s_1,s_2,s_3,t) \cdot \frac{ds_1ds_2ds_3}{r}, P \in C^2(T). \qquad (2.31)$$

**Теорема 2.3.** Если выполняются условия (2.2), (2.3), (2.22), то задача (Н - С) разрешима в $D^0(T)$.

**Замечание 2.2.** Пусть $\theta_i,(i=\overline{1,3})$ произвольные функции. Тогда используя идею решения схемы 1, с учетом (2.5), получим уравнение Пуассона:

$$\Delta J = -\Phi, \qquad (2.32)$$

$$\Phi \equiv \theta_{1x} + \theta_{2y} + \theta_{3z} - (f_{1x} + f_{2y} + f_{3z}), J \equiv \frac{1}{\rho}P + \frac{1}{2}Q \ . \qquad (2.33)$$

Следовательно, учитывая решение уравнения (2.32) на основе системы (2.5) и (2.6) получим систему относительно функции: $\theta_i,(i=\overline{1,3})$, $\theta_{1x},\theta_{2y},\theta_{3z}$ (из шести уравнений), а относительно $u,\upsilon,w$ имеем систему из трех уравнений, правая сторона которых зависит от $\theta_i,(i=\overline{1,3})$, $\theta_{1x},\theta_{2y},\theta_{3z}$. Далее, с учетом (1.4), (2.33) находим уравнение и относительно давления. Всего в этом случае, получим систему из 10 уравнений с 10 неизвестными, (система решается на основе метода Пикара).

**Критерия «О гладких решениях задачи (Н-С)»**. Задача (Н-С) для несжимаемой жидкости имеет гладкое единственное решение в $(u,\upsilon,w,P)\in D^0(T)$, тогда и только тогда, когда «исправленные» операторы типа теплопроводности допускают условия или схемы 1 или схемы 2 (здесь функции $\theta_i,(i=\overline{1,3})$ определяются в виде «исправленных» операторов).

## Выводы:

**1.** При условиях критерия «О гладких решениях задачи (Н-С)» нестационарная задача (Н-С) для несжимаемой жидкости разрешима в $D^0(T)$.

**2.** Метод «МЭРС - (Н-С)» применим и к задачам (Н-С) для несжимаемой жидкости в ограниченной области.

**3.** На основе метода «МЭРС - (Н-С)» можно решать и стационарную задачу (Н-С) для несжимаемой жидкости.

**4.** Результаты работы обобщаются для задачи (Н-С) несжимаемой жидкости, когда: $u\in R^n, x\in R^n, t\in[0,T_0]$.

## Литература

**1.** Существование и гладкость решений уравнений Навье – Стокса //Задачи тысячелетия, сформулированные в 2000 году Математическим институтом Клея.

**2.** Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - Москва: Наука, 1974.-712 с.

**3.** Соболев С.Л. Уравнения математической физики.- Изд. 4.- Москва: Наука, 1966. – 443 с.

## ПРИМЕЧАНИЕ

Из полученных результатов схемы 1 следует, что функции: $u,\upsilon,w\in C^3(T)$ определяются из системы (2.14). Поэтому, учитывая (2.3) и:

$$u_x=\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu t})^3}\iint\int_{-\infty}^{\infty}exp(-\frac{\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2}{4\mu t})u_x^0(x-\tau_1,y-\tau_2,z-\tau_3)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3+$$

$$+\int_0^t\cdot\iint\int_{-\infty}^{\infty}exp(-\frac{\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2}{4\mu(t-\tau)})\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-\tau)})^3}[f_{1x}(x-\tau_1,y-\tau_2,z-\tau_3,\tau)-$$

$$-J_{x^2}(x-\tau_1,y-\tau_2,z-\tau_3,\tau)-\phi_{1x}(x-\tau_1,y-\tau_2,z-\tau_3,\tau)]d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau,$$

$$\upsilon_y=\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu t})^3}\iint\int_{-\infty}^{\infty}exp(-\frac{\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2}{4\mu t})\upsilon_y^0(x-\tau_1,y-\tau_2,z-\tau_3)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3+$$

$$+\int_0^t\cdot\iint\int_{-\infty}^{\infty}exp(-\frac{\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2}{4\mu(t-\tau)})\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-\tau)})^3}[f_{2y}(x-\tau_1,y-\tau_2,z-\tau_3,\tau)-$$

$$-J_{y^2}(x-\tau_1,y-\tau_2,z-\tau_3,\tau)-\phi_{2y}(x-\tau_1,y-\tau_2,z-\tau_3,\tau)]d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau,$$

$$w_z=\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu t})^3}\iint\int_{-\infty}^{\infty}exp(-\frac{\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2}{4\mu t})w_z^0(x-\tau_1,y-\tau_2,z-\tau_3)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3+$$

$$+\int_0^t\cdot\iint\int_{-\infty}^{\infty}exp(-\frac{\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2}{4\mu(t-\tau)})\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-\tau)})^3}[f_{3z}(x-\tau_1,y-\tau_2,z-\tau_3,\tau)- \qquad (*)$$

$$-J_{z^2}(x-\tau_1,y-\tau_2,z-\tau_3,\tau)-\phi_{3z}(x-\tau_1,y-\tau_2,z-\tau_3,\tau)]d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau,$$

и суммируя (*), получим:

$$0=\int_0^t\cdot\iint\int_{-\infty}^{\infty}exp(-\frac{\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2}{4\mu(t-\tau)})\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-\tau)})^3}[-F_0(x-\tau_1,y-\tau_2,z-\tau_3,\tau)-$$

$$-\Delta J(x-\tau_1,y-\tau_2,z-\tau_3,\tau)]d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau=0,F_0\equiv-(f_{1x}+f_{2y}+f_{3z}),$$

что требовалось доказать, т.е. (2.14) удовлетворяет уравнению (2.3).

---

**ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА**

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА НАВЬЕ – СТОКСА
ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ


Омуров Таалайбек Дардайылович

*1957 года рождения, с. Карасу, Жайылского района, Кыргызская Республика, по национальности кыргыз. Доктор физико-математических наук, профессор Кыргызского Национального Университета имени Ж. Баласагына, член кандидатского и докторского диссертационного Совета ИМ НАН КР. Отличник образования Кыргызской Республики. Опубликовано более 100 научных работ.*

*Адрес: г. Бишкек, переулок Кеминский, дом №48.*

Тел. +996 312 34 55 68
Сот. +996 555 71 29 66
E-mail: omurovtd@mail.ru

УДК 517.2
ББК 22.311
0-58

Omurov Taalaibek Dardayilovich
Nonstationary Navier-Stokes Problem for Incompressible Fluid
Zh.Balasagyn KNU – Bishkek, 2010.- 21c.

ISBN 978 – 9967 – 02 – 643 – 8

One of the present problems in mathematics is the Navier-Stokes equation (N-S), which describes the motion of viscous Newtonian fluid, and which is a basic of hydrodynamic. Study of this equation presents a scientific interest not only in theoretical, but also in practical application.

In this work we offer you a method of solution of problem (N-S) for incompressible fluid [1,2], which proves existence of smoothness of problem studied.

Bibliography 3 names

The work is published in two languages separately: Russian and English.

The main content of the work is registered in Kyrgyzpatent: Sector of copyright objects, author's certificate No. 1543 of 2010/07/30.